全品
— SINCE 1992 —

教育图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年专注教育行业

全品一线

二轮专题复习

广东专版

高中

数学

作业手册

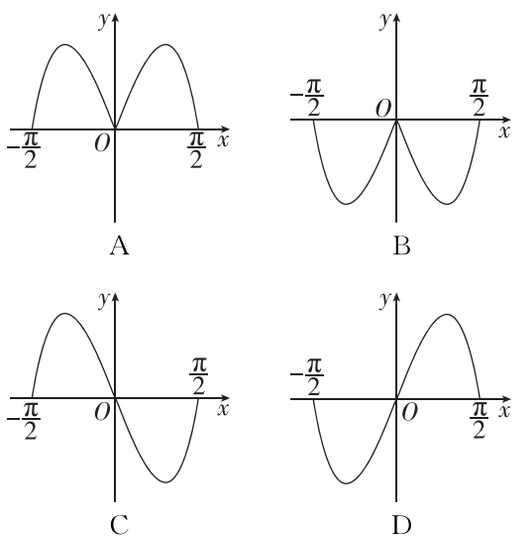
CONTENTS 目录

限时集训（一） 微专题 1 函数的图象与性质的应用 …… 107
限时集训（二） 微专题 2 不等式 …… 109
限时集训（三） 微专题 3 利用导数研究函数性质 …… 111
限时集训（四） 微专题 4 函数零点 …… 113
限时集训（五） 微专题 5 不等式恒（能）成立问题 …… 115
提能特训（一） 与零点、极值点有关的证明 …… 117
提能特训（二） 含 $\ln x$，e^x 的求参或证明问题 …… 119
提能特训（三） 导数与三角函数结合问题 …… 121
提能特训（四） 函数、导数有关的创新探索问题 …… 123
限时集训（六） 微专题 6 三角函数的图象与性质、三角恒等变换 …… 125
限时集训（七） 微专题 7 平面向量的应用 …… 127
限时集训（八） 微专题 8 解三角形 …… 129
限时集训（九） 微专题 9 多三角形问题 …… 131
限时集训（十） 微专题 10 等差数列、等比数列 …… 133
限时集训（十一） 微专题 11 数列递推与数列求和 …… 135
限时集训（十二） 微专题 12 数列与其他知识的交汇问题 …… 137
限时集训（十三） 微专题 13 空间几何体 …… 139
限时集训（十四） 微专题 14 空间几何体的切接问题 …… 141
限时集训（十五） 微专题 15 空间角与空间距离问题 …… 143
限时集训（十六） 微专题 16 立体几何中的动态问题 …… 145
提能特训（五） 立体几何有关的创新交汇问题 …… 147
限时集训（十七） 微专题 17 直线与圆 …… 149
限时集训（十八） 微专题 18 圆锥曲线的定义与性质 …… 151
限时集训（十九） 微专题 19 圆锥曲线热点问题（一）必考题型 …… 153
限时集训（二十） 微专题 20 圆锥曲线热点问题（二）多曲线问题 …… 156
提能特训（六） 圆锥曲线中非对称韦达定理的解题技巧 …… 158
提能特训（七） 圆锥曲线有关的创新探索问题 …… 159
限时集训（二十一） 微专题 21 计数原理 …… 161
限时集训（二十二） 微专题 22 统计与成对数据的统计分析 …… 163
限时集训（二十三） 微专题 23 概率 …… 166
限时集训（二十四） 微专题 24 随机变量及其分布 …… 169
提能特训（八） 概率与数列交汇问题 …… 172
提能特训（九） 统计概率中的创新问题 …… 175

■ 参考答案 /242

基础过关

1. [2026·湖南长郡中学一模] 函数 $y=(e^x-e^{-x})\cos x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的大致图象为 （ ）



A　B　C　D

2. [2023·全国乙卷] 已知 $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^{ax}-1}$ 是偶函数，则 $a=$ （ ）

A. -2　　B. -1

C. 1　　D. 2

3. [2023·新课标Ⅰ卷] 设函数 $f(x)=2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减，则 a 的取值范围是（ ）

A. $(-\infty,-2]$　　B. $[-2,0)$

C. $(0,2]$　　D. $[2,+\infty)$

4. [2025·全国一卷] 已知 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的偶函数，当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时，$f(x)=5-2x$，则 $f\left(-\frac{3}{4}\right)=$ （ ）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

5. [2026·湖北新高考协作体联考] 已知函数 $f(x)=\ln(e^x+e^{-x})$，若 $a=f(\log_{\frac{1}{3}}2)$，$b=f(3^{0.01})$，$c=f\left(\frac{2}{3}\right)$，则 （ ）

A. $c>b>a$　　B. $c>a>b$

C. $b>a>c$　　D. $b>c>a$

6. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)$ 为偶函数，$f(2x+1)$ 为奇函数，则下列结论一定正确的是 （ ）

A. $f(-1)=0$　　B. $f(0)=0$

C. $f(2)=0$　　D. $f(4)=0$

7. [2026·辽宁抚顺六校二模] 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2+ax-2a$，若 $f(x)<0$ 在 $[-3,-1]$ 上恒成立，则 a 的取值范围为 （ ）

A. $(-8,0)$

B. $(1,+\infty)$

C. $(-\infty,-8)\cup(0,+\infty)$

D. $(-9,1)$

8. （多选题）[2026·江苏南京一模] 已知函数 $f(x)=\ln(\cos x)-|x|$，则 （ ）

A. $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\left|-\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

B. $f(x)$ 是偶函数

C. $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增

D. $g(x)=f(x)+\pi$ 有且仅有 2 个零点

9. （多选题）[2026·福建南平二模] 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的可导函数，若 $f(x+y)=f(x)+f(y)+6xy(x+y)$，且 $f'(0)=-6$，则 （ ）

A. $f(0)=0$

B. $f(x)$ 是偶函数

C. $f'(x+1)-f'(x)=12x+6$

D. $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减

10. （多选题）[2026·江苏南京二模] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x,x\leqslant 1,\\-f(x-1),x>1,\end{cases}$ 则 （ ）

A. $f(2)=1$

B. 对任意的 $x>0$，$f(x+2)=f(x)$ 恒成立

C. $f(x)$ 在 $(7,8)$ 上单调递减

D. $f(x)$ 有且仅有 1 个零点

11. [2026·山东东营一模] 写出一个满足下列条件的函数 $f(x)=$_____.

①$f(-x)=f(x)$;

②对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1\neq x_2$,有 $[f(x_1)-f(x_2)](x_1-x_2)<0$;

③对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1\neq x_2$,有 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$;

④$f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)f(x_2)$.

12. 已知函数 $f(x)=2^x-2^{-x}$,若 $f\left(2ax^2-\dfrac{3}{8}\right)+f(ax)<0$ 恒成立,则 a 的取值范围是_____.

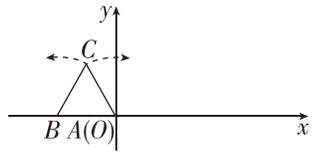
能力提升

13. [2026·湖北随州三模] 已知 $a>0$,函数 $f(x)=\ln|x|-|ax+b|$ 的最大值为 0,则 a 的最小值为 (　　)

A. $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. 1　　D. e

14. (多选题)[2026·湖南岳阳二检] 如图,在平面直角坐标系中,边长为 2 的正三角形 ABC 沿着 x 轴连续滚动(滚动时无滑动),若顶点 A 在滚动中恰好经过坐标原点,设顶点 $B(x,y)$ 的坐标满足函数关系式 $y=f(x)$,则下列说法中正确的有 (　　)



A. $f(1)=\sqrt{3}$

B. 函数 $y=f(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x=1+6k,k\in\mathbf{Z}$

C. 不等式 $f(x)\geqslant\sqrt{3}$ 的解集为 $[-1+6k,3+6k],k\in\mathbf{Z}$

D. 直线 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{7}x$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象恰有 3 个交点

15. (多选题)[2026·山东烟台二模] 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,其图象是一条连续不断的曲线,$f(1)=1$,$f(x+2)$ 为奇函数,函数 $g(x)=(x-1)f(x-1)$,且 $g(2x+1)$ 为偶函数,则 (　　)

A. $f(x)$ 是奇函数

B. $f(x)$ 的一个周期为 4

C. $g(3)=1$

D. $\sum\limits_{i=1}^{100}g(i)=-50$

16. [2026·资阳三模] 给出如下定义:函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在 $x_0\in D$,使得 $f(x_0+k)=f(x_0)+f(k)$,则称函数 $f(x)$ 具有性质 $M(k)$. 已知函数 $h(x)=\lg\dfrac{a}{x^2+3}(x>0)$ 具有性质 $M(2)$,则实数 a 的最小值为_____.

基础过关

1. [2026·重庆南开中学月考] 已知集合 $A=\{x\mid y=\sqrt{x-a}\}$，$B=\left\{x\left|\frac{x-1}{x+3}<0\right.\right\}$，$A\cap B=B$，则实数 a 的取值范围为 （ ）

A. $a\leqslant 1$　　B. $a\leqslant -3$

C. $-3\leqslant a\leqslant 0$　　D. $a\geqslant 1$

2. 若 $a,b\in\mathbf{R}$，则“$a<b$”是“$a^3<b^3$”的 （ ）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. [2026·山东枣庄一模] 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，则下列说法正确的是 （ ）

A. 若 $a>b$，则 $a^2>b^2$

B. 若 $a>b$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

C. 若 $ab\neq 0$，则 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$

D. 若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$

4. [2025·北京卷] 已知 $a>0,b>0$，则 （ ）

A. $a^2+b^2>2ab$

B. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{1}{ab}$

C. $a+b>\sqrt{ab}$

D. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqslant\frac{2}{\sqrt{ab}}$

5. 下列函数中最小值为 4 的是 （ ）

A. $y=x^2+2x+4$

B. $y=|\sin x|+\frac{4}{|\sin x|}$

C. $y=2^x+2^{2-x}$

D. $y=\ln x+\frac{4}{\ln x}$

6. 已知随机变量 $X\sim N(1,\sigma^2)$，且 $P(X\leqslant -2)=P(X\geqslant a)$，则当 $0<x<a$ 时，$\frac{1}{x}+\frac{4}{a-x}$ 的最小值为 （ ）

A. $\frac{9}{2}$　　B. 3　　C. $\frac{7}{3}$　　D. $\frac{9}{4}$

7. [2026·广州二模] 已知 $a>b>0$，且 $a+b=1$，则下列不等式不一定成立的是 （ ）

A. $\sqrt{\mathrm{e}}<\mathrm{e}^a$　　B. $\frac{1}{a-b}<\frac{1}{b}$

C. $a^2+b^2>\frac{1}{2}$　　D. $\sin a<\cos b$

8. （多选题）[2026·山东济南一模] 已知实数 a,b,c 满足 $a<b<c$，$ac<0$，则 （ ）

A. $ab\leqslant bc$

B. $|a+c|<|a-c|$

C. $\frac{1}{c-a}<\frac{1}{c-b}$

D. $\frac{a}{c}\geqslant\frac{a+b}{c+b}(c+b\neq 0)$

9. （多选题）[2026·辽宁朝阳三调] 已知正实数 a,b 满足 $a+b=1$，则下列说法正确的是（　　）

A. $\ln a<0$　　B. $2^a+2^b\geqslant 2\sqrt{2}$

C. $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$　　D. $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\leqslant 3+2\sqrt{2}$

10. [2026·广东湛江二模] 已知正实数 x,y 满足 $x+3y=8$，则 $(x+1)(y+1)$ 的最大值为_____.

11. [2026·黑龙江哈尔滨九中模拟] 已知正实数 a,b 满足 $ab+a+b=8$，则 $a+b$ 的取值范围是_____，ab 的最大值是_____.

12. [2026·重庆八中模拟] 函数 $f(x)=\sin x-\sin 2x\tan x$ 的最大值为_____.

能力提升

13. [2026·北京卷] 为纪念红军长征胜利 90 周年，某校组织高一和高二两个年级的学生去甲、乙两个红色教育基地进行研学，每位学生选择其中一个基地参加. 已知该校高一学生人数多于高二学生人数，若选择甲基地的学生人数多于选择乙基地的学生人数，则（　　）

A. 选择甲基地的高一学生人数多于选择乙基地的高一学生人数

B. 选择甲基地的高一学生人数多于选择乙基地的高二学生人数

C. 选择甲基地的高二学生人数不多于选择乙基地的高一学生人数

D. 选择甲基地的高二学生人数不多于选择乙基地的高二学生人数

14. （多选题）已知 a,b 均为正实数，且 $a+2b=2$，则（　　）

A. $a^2+4b^2\leqslant 2$

B. $2^a+4^b\geqslant 4$

C. $\log_2 a+\log_2 b\leqslant -1$

D. $(\tan a-1)(\tan 2b-1)<2$

15. （多选题）[2026·浙江县域高中联考] 已知 $a,x,y\in\mathbf{R}$，$x+10=9^a$，$y+12=11^a$，则（　　）

A. 当 $a>\log_3 2$ 时，$x>-6$

B. 存在实数 a，使得 $x=y$

C. 对任意 $a>1$，都有 $x^2+y^2>2$

D. 当 $a=\lg 11$ 时，$x<0<y$

16. 已知实数 x,y 满足 $|3x-2y|+|y-x|=|2x-y|$ 且 $y\neq 0$，则 $\frac{2xy}{9x^2+3xy+4y^2}$ 的最大值是_____.

基础过关

1. [2026·苏北七市二调] 函数 $f(x)=x^3-3x^2$ 的所有极值的和为 （ ）

A. -4　　B. -2

C. 0　　D. 2

2. [2023·全国甲卷] 曲线 $y=\dfrac{e^x}{x+1}$ 在点 $\left(1,\dfrac{e}{2}\right)$ 处的切线方程为 （ ）

A. $y=\dfrac{e}{4}x$　　B. $y=\dfrac{e}{2}x$

C. $y=\dfrac{e}{4}x+\dfrac{e}{4}$　　D. $y=\dfrac{e}{2}x+\dfrac{3e}{4}$

3. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$，若 $f'(1)=0$，且 $f(1)$ 不是 $f(x)$ 的极值，则 （ ）

A. $a+b>0$　　B. $a+b=0$

C. $ab\geqslant 3$　　D. $ab=-3$

4. [2023·新课标Ⅱ卷] 已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x$ 在区间 $(1,2)$ 单调递增，则 a 的最小值为 （ ）

A. e^2　　B. e

C. e^{-1}　　D. e^{-2}

5. [2026·浙江强基联盟模拟] 下列函数的图象上，存在与 x 轴平行的切线的是 （ ）

A. $f(x)=\sin x+x$　　B. $f(x)=e^x+x$

C. $f(x)=\ln x+x$　　D. $f(x)=x^3+x$

6. [2026·辽宁名校联盟检测] 若 $x=-\dfrac{1}{3}$ 是函数 $f(x)=a(x-1)^2(x+a^2)$ 的极大值点，则 $f(x)$ 的极小值为 （ ）

A. -1　　B. $-\dfrac{8}{9}$

C. $-\dfrac{4}{9}$　　D. 0

7. [2022·全国乙卷] 函数 $f(x)=\cos x+(x+1)\sin x+1$ 在区间 $[0,2\pi]$ 的最小值、最大值分别为 （ ）

A. $-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}$　　B. $-\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}$

C. $-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}+2$　　D. $-\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}+2$

8. [2026·广西桂林二模] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2e(x+e),x<0,\\ xe^x,x\geqslant 0,\end{cases}$ 对于正实数 a，定义集合 $M_a=\{x\mid f(x-a)=f(x)\}$，且 $M_a\neq\varnothing$，则 a 的取值范围是 （ ）

A. $[2,e]$　　B. $(2,e]$

C. $\left[e,e+\dfrac{1}{2}\right]$　　D. $\left(2,e+\dfrac{1}{2}\right]$

9. （多选题）[2026·广东广州二模] 已知函数 $f(x)=\cos x+\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{3}\cos 3x+\dfrac{1}{4}\cos 4x$，则 （ ）

A. 2π 是 $f(x)$ 的一个周期

B. 直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴

C. $f(x)$ 的最大值为 $\dfrac{25}{12}$

D. $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减

10. （多选题）[2024·新课标Ⅱ卷] 设函数 $f(x)=2x^3-3ax^2+1$，则 （ ）

A. 当 $a>1$ 时，$f(x)$ 有三个零点

B. 当 $a<0$ 时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

C. 存在 a,b，使得 $x=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称轴

D. 存在 a，使得点 $(1,f(1))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称中心

11. [2025·全国一卷] 若直线 $y=2x+5$ 是曲线 $y=e^x+x+a$ 的一条切线，则 $a=$_____.

12. 函数 $f(x)=|2x-1|-2\ln x$ 的最小值为_____.

13. [2026·江苏南京二模] 曲线 $y=\frac{1}{4x}$ 在 $x=n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 处的切线为 l_n，记 l_n 在 x，y 轴上的截距分别为 x_n，y_n，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i\cdot y_{i+1}+x_{i+1}\cdot y_i)=$_____.

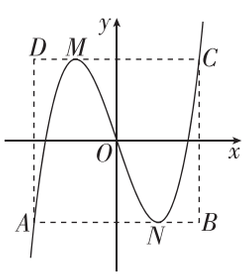
能力提升

14. [2026·北京人大附中模拟] 在平面直角坐标系 xOy 中，将函数 $y=f(x)$ 的图象绕坐标原点逆时针旋转 $\alpha\left(0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 后，所得到的曲线仍然是某个函数的图象，则称 $y=f(x)$ 为“α 旋转函数”. 若 $h(x)=\frac{bx}{e^x}$ 为“$\frac{\pi}{4}$ 旋转函数”，则 b 的最小值是 （ ）

A. $-e^2$　　B. $-e^3$

C. $-2e$　　D. $-3e$

15. （多选题）[2026·浙江温州二模] 已知函数 $f(x)=x^3-3a^2x(a>0)$ 的极大值点和极小值点分别为 x_1 和 x_2，过点 $M(x_1,f(x_1))$，$N(x_2,f(x_2))$ 分别作 x 轴的平行线交 $f(x)$ 的图象于点 C，A，过点 M，N 构造矩形 $ABCD$，如图所示，则下列说法正确的是 （ ）



A. $x_2-x_1=2a$

B. 点 M 为线段 CD 上靠近 D 的三等分点

C. 当 $a=1$ 时，四边形 $ABCD$ 为正方形

D. 当 $a=1$ 时，四边形 $AMCN$ 为菱形

16. [2026·山东济宁三模] 已知实数 x，y 满足 $y^{x-1}+(x-1)(\ln y-1)=\ln(x-1)$，则 y 的取值范围是_____.

17. （15 分）[2026·江苏南通二调] 已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+x$.

(1) 若 $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，求 a；

(2) 若函数 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2 $(x_1<x_2)$.

(i) 求 a 的取值范围；

(ii) 设点 $A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$，证明：存在 x_3，$x_4\in(x_1,x_2)$，且 $x_3\neq x_4$，使得曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_3$ 和 $x=x_4$ 处的切线都与直线 AB 平行.

基础过关

1. 函数 $f(x)=x^3-12x+16$ 的零点个数是 （ ）
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2. 若函数 $f(x)=2x^3-3x^2-a$ 在区间$(1,2)$内仅有一个零点，则 a 的取值范围为 （ ）
A. $(2,3)$ B. $(0,1)$
C. $(-1,4)$ D. $(-1,0)$

3. [2023·全国乙卷] 函数 $f(x)=x^3+ax+2$ 存在 3 个零点，则 a 的取值范围是 （ ）
A. $(-\infty,-2)$ B. $(-\infty,-3)$
C. $(-4,-1)$ D. $(-3,0)$

4. [2026·陕西榆林三模] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\log_3 x|,0<x\leqslant 3,\\ 2-\log_3 x,x>3,\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-m$ 有三个不同的零点，则 m 的取值范围为 （ ）
A. $(0,1)$ B. $[0,1)$
C. $(0,1]$ D. $[0,1]$

5. [2026·湖南怀化 5 月模拟] 已知函数 $f(x)=\frac{e^{x-1}+e^{1-x}}{2}+3$，若 $a-f(x)=0$ 有唯一解，则实数 a 的值是 （ ）
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

6. [2026·江西南昌模拟] 已知$[x]$表示不超过 x 的最大整数，$f(x)=2x-2[x]-1$，若函数 $f(x)$在区间$(0,m)$上恰好有 3 个零点，则 m 的最大值是 （ ）
A. 2 B. $\frac{5}{2}$ C. 3 D. $\frac{7}{2}$

7. （多选题）已知 $a>0$，且 $a\neq 1$，函数 $f(x)=a^x-x^a(x>0)$，则 （ ）
A. 当 $a=e$ 时，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立
B. 当 $a>e$ 时，$f(x)$有两个零点
C. 当 $0<a<1$ 时，$f(x)$有且仅有 1 个零点
D. 存在 $a>1$，使得 $f(x)$存在三个极值点

8. [2026·河南焦作一模] 已知 $f(x)$是定义域为 **R** 的奇函数，且以 1 为周期，则 $f(x)$在区间$[-2,2]$内至少有_____个零点.

9. [2026·合肥一模] 已知函数 $f(x)=(\ln x)^2+ax\ln x-x^2$ 有且仅有三个零点，则 a 的取值范围是_____.

10. （15 分）[2026·福州 3 月模拟] 已知函数 $f(x)=(4x+2)\ln x+a$.
(1) 当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；
(2) 若函数 $g(x)=(x+2)^2-f(x)$有且仅有一个零点，求 a 的值.

能力提升

11. （多选题）[2026·湖北黄冈二模] 若直线 $y=a$ 与函数 $f(x)=xe^{2x}$ 和 $g(x)=\frac{x\ln x}{2}$的图象共有四个不同的交点，设从左到右四个交点的横坐标分别为 x_1,x_2,x_3,x_4，则 （ ）
A. $-\frac{1}{2e}<a<0$
B. $e^{2x_1}=x_3$
C. x_1,x_2,x_3,x_4 成等比数列
D. $x_1x_3=x_2x_4$

12. 设 x_1,x_2 分别是 $f(x)=x-a^{-x}$ 与 $g(x)=x\log_a x-1$ 的零点，其中 $a>1$，则 x_1+9x_2 的取值范围是_____.

13. (11 分)已知函数 $f(x)=\ln x$.

(1)若方程 $f(x)=kx$ 有两个不同的实数根，求实数 k 的取值范围；

(2)证明：$f(x)<\dfrac{e^x+1}{x}-2$ 恒成立.

14. (17 分)[2026·江西新余二模] 在平面直角坐标系中，如果将函数 $y=f(x)$ 的图象绕坐标原点逆时针旋转 $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 后，所得曲线仍然是某个函数的图象，则称 $f(x)$ 为“α 旋转函数”.

(1)判断函数 $y=\sqrt{3}x$ 是否为“$\dfrac{\pi}{6}$旋转函数”，并说明理由；

(2)已知函数 $f(x)=\ln(2x+1)(x>0)$ 是“α 旋转函数”，求 $\tan\alpha$ 的最大值；

(3)若函数 $g(x)=m(x-1)e^x-x\ln x-\dfrac{x^2}{2}$ 是“$\dfrac{\pi}{4}$旋转函数”，求 m 的取值范围.

基础过关

1. 若不等式 $e^x \geqslant kx$（$e=2.718\ 28\cdots$ 为自然对数的底数）对任意实数 x 恒成立，则实数 k 的最大值为（　　）

A. 0　　B. 1

C. e　　D. e^2

2. 函数 $f(x)=\ln x-mx+1$，若 $f(x)\geqslant 0$ 有解，则 m 的取值范围为（　　）

A. $(-\infty,1]$　　B. $(-\infty,2]$

C. $[1,+\infty)$　　D. $[2,+\infty)$

3. [2026·湖北恩施二模] 已知 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，若实数 a 满足 $\ln a\cdot\tan x>\ln x$ 恒成立，则（　　）

A. $a\geqslant 1$　　B. $a\geqslant\frac{\pi}{4}$

C. $a\geqslant-\ln\frac{\pi}{4}$　　D. $a\geqslant\frac{1}{2}$

4. [2026·陕西西安模拟] 已知函数 $f(x)=\frac{a\ln x}{x}-x^2$，对于 $x_1,x_2\in[2,2026]$，且当 $x_2>x_1$ 时，恒有 $\frac{f(x_1)}{x_2}-\frac{f(x_2)}{x_1}>0$，则实数 a 的取值范围为_____.

5. 已知函数 $f(x)=\ln(ax)-x-\frac{e^{x-1}}{x}-\frac{1}{a}+3$，当 $x>0$ 时，$f(x)\leqslant 0$ 恒成立，则 a 的取值范围为_____.

6. [2026·武汉五月调考] 已知不等式 $e^{ax}+e^{\frac{a}{x}}\leqslant 2e^a$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为_____.

7. (15分)[2026·深圳二模] 已知函数 $f(x)=e^x-x^2+(2-a)x$.

(1)若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，求 a 的值和 $f(x)$ 的极小值；

(2)若不等式 $f(x)\geqslant 1$ 对任意 $x\geqslant 1$ 恒成立，求 a 的取值范围.

8. (17分)已知 $M=(2ex-y)(\ln y-\ln x)-tx$，$t\in\mathbf{R}$.

(1)当 $t=0$，$y=1$ 时，求 M 关于 x 的函数 $M(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程；

(2)当 $y=e$ 时，若 $M>0$ 对 $x\in[1,+\infty)$ 有解，求 t 的取值范围；

(3)若对于任意的 $x,y\in(0,+\infty)$，$M\leqslant 0$ 恒成立，求 t 的最小值.

能力提升

9. (15 分)[2026 · 福建泉州二模] 已知函数 $f(x)=x-a\ln(x+1)$.

(1)讨论 $f(x)$的极值;

(2)证明:当 $x\in[0,1]$时,$x\leqslant\frac{3}{2}\ln(x+1)$;

(3)证明:$\sum\limits_{i=1}^{2025}\frac{1}{i}<\frac{3}{2}\ln 2026$.

10. (15 分)[2026 · 广东东莞二模] 设 a 为非负实数,函数 $f(x)=\tan x-a\sin x-2x$,$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(1)当 $a=0$ 时,求 $f(x)$的单调区间;

(2)若 $f(x)+b\geqslant 0$ 恒成立,求 $a+b$ 的最小值.

基础教育行业专研品牌 全品 SINCE 1992 30+年专注教育行业

提能特训（一） 与零点、极值点有关的证明

时间 45分钟

基础过关

1. （17分）已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2+(2a+1)x$.

（1）当 $a=0$ 时，求 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）当 $a<0$ 时，证明：$f(x)\leqslant-\frac{3}{4a}-2$；

（3）若对任意的正数 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$，总有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>2$，求实数 a 的取值范围.

2. （17分）[2026·合肥三模] 已知函数 $f(x)=b\cdot a^x-\frac{1}{6}x^3$，其中 $a>1,b>0$，函数 $y=f(x)+f(-x)$ 的最小值为 2，$g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

（1）求 b 的值；

（2）若 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，求 $\ln a$ 的取值范围；

（3）若 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的极小值点为 x_0，证明：$g(x_0)<\frac{1}{2}e^{\frac{4}{3}}$.

能力提升

3. (17 分)[2026 · 浙江 Z20 联盟三联] 已知函数 $f(x)=\dfrac{x+a}{e^x}(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=1$ 时,求函数 $f(x)$的最值;

(2)讨论关于 x 的方程 $f(x)=f(-x)$的解的个数;

(3)若方程 $f(x)=f(-x)$存在两个非零解 x_1,x_2,且满足 $x_1<0<x_2$,证明:$|f'(x_1)|>|f'(x_2)|$.

4. (17 分)[2026 · 雅安二模] 已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-\dfrac{1}{2}ax^2$.

(1)当 $a=0$ 时,求函数 $f(x)$的最小值;

(2)当 $a>0$ 时,讨论函数 $f(x)$的单调区间;

(3)若函数 $f(x)$存在两个极值点,设 x_0 为 $f(x)$的极小值点,x_1 为 $f(x)$的零点,证明:$2x_1-x_0>2$.

提能特训（二） 含 $\ln x$，e^x 的求参或证明问题

时间 45分钟

基础过关

1. （15 分）设函数 $f(x)=ax-\ln x$.

（1）求 $f(x)$的图象在 $x=1$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求 a 的最小值；

（3）求证：$x\ln x<e^x$.

2. （15 分）[2026·哈尔滨二模] 已知函数 $f(x)=xe^x-ax(a>0)$.

（1）若函数 $f(x)$的图象在 $x=-1$ 处的切线与直线 $y=x$ 垂直，求函数 $f(x)$的单调区间；

（2）若对任意 $x>0$，$f(x)\geqslant a(\ln x+1)$恒成立，求实数 a 的取值范围.

能力提升

3. (17 分)[2026 · 山东日照模拟] 已知函数 $f(x)=e^x$,$g(x)=\ln x$.

(1)若曲线 $y=\dfrac{f(x)}{x}$ 与直线 $y=m$ 相切,求 m 的值.

(2)若不等式 $ag(x)\leqslant x-1(a\in\mathbf{R})$ 恒成立.

(i)求 a 的值;

(ii)求证:$f(x)-2xg\left(\dfrac{x}{2}\right)-ex>1$ 恒成立.

4. (17 分)[2026 · 厦门三模] 已知函数 $f(x)=e^x-a\ln(ax-a)$,其中 $a\neq 0$.

(1)当 $a=-1$ 时,求 $f(x)$ 的图象在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程.

(2)已知 $f(x)>-a$ 恒成立.

(i)求 a 的取值范围;

(ii)记 $f(x)$ 的极值点为 x_0,证明:$f(x_0)<e^2+\dfrac{1}{e}$.

提能特训（三） 导数与三角函数结合问题

时间 45分钟

基础过关

1. （15分）[2026·新疆喀什模拟] 已知函数 $f(x)=x+a\sin x-x\cos x$.

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\pi, f(\pi))$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上有零点，求实数 a 的取值范围.

2. （15分）已知函数 $f(x)=\sin x+\ln x$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $M\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）证明：函数 $f(x)$ 在区间 $(1,3)$ 上存在唯一的极大值点；

（3）证明：函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点.

能力提升

3. (12 分)[2023·新课标Ⅱ卷] (1)证明:当 $0<x<1$ 时,$x-x^2<\sin x<x$;

(2)已知函数 $f(x)=\cos ax-\ln(1-x^2)$,若 $x=0$ 是 $f(x)$的极大值点,求 a 的取值范围.

4. (17 分)给出以下三个材料:①若函数 $f(x)$可导,我们通常把导函数 $f'(x)$的导数叫作 $f(x)$的二阶导数,记作 $f''(x)$.类似地,二阶导数的导数叫作三阶导数,记作 $f'''(x)$,三阶导数的导数叫作四阶导数……一般地,$n-1$ 阶导数的导数叫作 n 阶导数,记作 $f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'$,$n\geqslant 4$.②若 $n\in\mathbf{N}^*$,定义 $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$.③若函数 $f(x)$在包含 x_0 的某个开区间(a,b)上具有 n 阶导数,则对于任意 $x\in(a,b)$,有 $g(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$,我们将 $g(x)$称为函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处的 n 阶泰勒展开式.例如,$y=e^x$ 在点 $x=0$ 处的 n 阶泰勒展开式为 $1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n$.

根据以上三个材料,完成下面的题目:

(1)求出 $f_1(x)=\sin x$ 在点 $x=0$ 处的 3 阶泰勒展开式 $g_1(x)$,并直接写出 $f_2(x)=\cos x$ 在点 $x=0$ 处的 3 阶泰勒展开式 $g_2(x)$;

(2)比较(1)中 $f_1(x)$与 $g_1(x)$的大小;

(3)已知 $y=e^x$ 不小于其在点 $x=0$ 处的 3 阶泰勒展开式,证明:$e^x+\sin x+\cos x\geqslant 2+2x$.

提能特训（四） 函数、导数有关的创新探索问题

时间 45分钟

基础过关

1. （9分）[2026·江苏无锡模拟节选] 已知函数 $f(x)$ 是定义在 D 上的函数，其导函数为 $f'(x)$. 对于 $x_0 \in D$，若 $f(x) \geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 对任意 $x \in D$ 恒成立，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的“切线支撑点”，记函数 $f(x)$ 的所有“切线支撑点”构成的集合为 S_f.

(1)若 $f(x)=x+\ln x$，判断 $x=1$ 是否为函数 $f(x)$ 的“切线支撑点”，并说明理由；

(2)若 $f(x)=e^x+x$，求 S_f.

2. （17分）已知 $a>1$，$b,c \in \mathbf{R}$，$f(x)=a^x+bx^2+c$.

(1)若 $a=3$，$b=0$，$c=-5$，求不等式 $f(x)>0$ 的解集.

(2)若 $a=e$，$c=-1$，存在 b，使得函数 $f(x)$ 有三个零点 x_1,x_2,x_3（$x_1<x_2<x_3$），且 x_1,x_2,x_3 成等差数列，求 b 的值.

(3)若 $a=2$，$b=c=0$，$g(x)=f(x)+x$，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足 $a_n=g(n)$，$g(b_n)=n$（$n \geqslant 1$，$n \in \mathbf{N}$）. $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的公共项按从小到大的顺序构成数列 $\{c_n\}$，试问在数列 $\{c_n\}$ 中是否存在连续三项构成等比数列？请说明理由.

能力提升

3. (17 分)已知函数 $y=f(x)$,其中 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$,定义集合 $S(f)=\{(x,y)|y=f(x),x\in\mathbf{R}\}$.对于点 $P(p,q)$,定义集合 $D(P)=\{(x,y)||x-p|\leqslant 1,(x,y)\in S(f)\}$.若对任意 $(x,y)\in D(P)$,均有 $|y-q|\leqslant 1$,则称点 P 为平衡点.

(1)当 $a=b=0$ 时,判断点 $P(0,0)$ 是否为平衡点;

(2)当 $a=0$ 时,若点 $P(0,0)$ 是平衡点,求实数 b 的取值范围;

(3)求所有实数 a 和 b,使得点 $P(0,0)$ 是平衡点.